

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Մխիթարյան Վաղարշ Վալերիի

ՁԱՆԳՎԱԾԻ ՍԱԿԵՐՎՈՒՅԹԻՑ ԴՈՒՐՍ ԲԵՏԵՅԻ ԱՆՁԱՅԻ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՂՇԳՐԻՑ ԼՈՒՎՈՂ ՍՈՂԵԼՆԵՐԻ
ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԿՈՐԵԼՅԱՑԻՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ՖՈՐՄ
ՖԱԿՏՈՐՆԵՐԻ ՊՐՈՔԼԵՄՆԵՐԻ ԼՈՒՑԱՆ ԱՅԼ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

Ա.04.02 - «տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
բեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2000

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Мхитарян Вагарш Валериевич

Уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности и
Другие подходы к решению проблемы
корреляционных функций и форм факторов в теории
точно решаемых моделей

АВТОРЕФЕРАТ

*Диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико - математических наук по специальности
01.04.02 - теоретическая физика*

ЕРЕВАН 2000

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Ատենախոսության բեման հաստատվել է Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար Ֆիզմաթ. գիտությունների քեկնածու,
Հ. Մ. Բարսեղյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ Ֆիզմաթ. գիտությունների դոկտոր
Գ. Ջախարիձե (ԹՖԻ, Թբիլիսի),
Ֆիզմաթ. գիտությունների դոկտոր,
Ն. Ս. Անանիկյան (ԵրՖԻ);

Առաջատար կազմակերպություն՝ Բոննի համալսարան, Բոնն

Պաշտպանությունը կայանալու է "20" դեկտեմբերի 2000թ. ժամը 14.00-ին Երևանի
ֆիզիկայի ինստիտուտում գործող ԲՈՂ-ի 024 մասնագիտական խորհրդում (Երևան,
Ալիխանյան եղբայրների փ.2):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵրՖԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առարկած է "20" նոյեմբերի 2000թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտաբարոյաբար *Ս.Ի.Մ.* Ս. Թ. Մարգարյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском физическом институте

Научные руководитель Кандидат физ.-мат. наук,
Г. М. Бабуджян

Официальные оппоненты Доктор физ.-мат. наук,
Джапаридзе Г. (ТФИ, Тбилиси),
Доктор физ.-мат. наук,
Ананикян Н. С. (ЕрФИ).

Ведущая организация Боннский университет, Бонн.

Защита состоится "20" декабря 2000 г. в 14.00 часов на заседании специализированного совета Ереванского физического института (Ереван, ул. Братьев Алиханян 2)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрФИ.

Автореферат разослан "20" ноября 2000 г.

Ученый секретарь спец. совета *Ս.Ի.Մ.* А. Т. Маргарян

Актуальность темы. За последние несколько десятилетия исследования точно решаемых низкоразмерных моделей квантовой теории поля и статистической физики стали одной из бурно развивающихся областей современной физики. Это обусловлено не только математической привлекательностью последних, но и день за днем возрастающими применениями этих моделей в интересных теориях описывающих те или иные физические явления. Дело в том что в современной физике точно решаемые модели возникают как в тесно связанных с теориями элементарных частиц и квантовых полей струнных теориях так и в моделях статистической физики описывающих высокотемпературную или низкотемпературную сверхпроводимость, квантовый эффект Холла, эффект Кондо и другие примеры где сталкиваемся с проблемой сильных корреляций. Ярким примером такого рода является квантовая хромодинамика, где до сих пор не разрешена проблема невыедания кварков (конфайнмент): призванные описать взаимодействия кварков неабелевы калибровочные теории обладают так называемой асимптотической свободой, что препятствует выполнению традиционной теории возмущений на больших расстояниях. Одна из возможностей понимания проблемы конфайнмента связана именно с исследованием инфракрасных поведений корреляционных функций (1+1)-мерных точно решаемых моделей квантовой теории поля обладающих асимптотической свободой.

Можно также добавить, что точно интегрируемые двумерные модели статистической физики и (1+1)-мерные модели теории поля интересны не только в физике и математике, но и в химии, в генетике и даже в металлургии, так как определенными точно решаемыми моделями описываются некоторые эффективно одномерные или квази-одномерные химические соединения.

Основные успехи в двумерных теориях точно решаемых моделей связаны с двумя основополагающими направлениями. Первое из них опирается на конформную симметрию [1], которой обладают некоторые непрерывные квантово-полевые

модели и двумерные модели статфизики в точках фазового перехода, так как в двумерии масштабная инвариантность, возникающая при фазовом переходе, эквивалентна конформной [2]. В моделях с конформной симметрией физические состояния описываются посредством представлений бесконечномерной алгебры Вирасоро с определенным центральным зарядом, чьи генераторы строятся с помощью элементов тензора энергии-импульса [1]. В этих моделях успешно вычисляются корреляционные функции, когда представления алгебры Вирасоро вырождены (так называемые рациональные конформные теории), а корреляционные функции удовлетворяют определенным линейным дифференциальным уравнениям. Типичными примерами такого рода являются теории Весса-Зумино-Новикова-Виттена, где корреляционные функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям Книжника-Замолодчикова [3]. В струнных теориях конформные теории поля возникают при компактификации и из-за того что квантовые поля описывают степени свободы ассоциированные со струной а конформная симметрия является следствием репараметризационной инвариантности мировой поверхности образующейся при движении струны [4].

Второе направление основано на (квантовом или классическом) методе обратной задачи рассеяния и на анзаце Бете [5,6], которые оказываются чрезвычайно эффективными при рассмотрении как дискретных статфизических моделей и моделей квантовой теории поля допускающих точные решетчатые регуляризации (при алгебраическом варианте анзаца Бете [6]), так и непрерывных моделей квантовой теории поля (при координатном варианте анзаца Бете [5]). Здесь типичными являются одномерные цепочки Гейзенберга, Модель Хаббарда, шестивершинная и восьмивершинная модели а также нелинейная модель Шредингера, массивная модель Тирринга и теория поля синус-Гордон, которая к тому же допускает решетчатую регуляризацию [5].

Но несмотря на точную интегрируемость, которая подразумевает точную диагонализацию соответствующих Гамильтонианов и нахождение спектра, до сих пор не является вполне решенной вопрос вычисления корреляционных функций и форм факторов этих моделей. Между тем, последние являются важнейшими характеристиками физической системы. Известны

лишь немного примеров, когда корреляционные функции и форм факторы удается вычислять. Типичными примерами такого рода являются двумерная модель Изинга и двумерные рациональные конформные теории поля, где как уже отмечалось, корреляционные функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям.

Ситуация более сложная для остальных точно решаемых моделей. Здесь можно выделить три основных подхода. Первый подход возникает при изучении аналитических свойств и уравнений бутстрапа для S -матриц и форм факторов, в непрерывном пределе [7]. Типичными примерами моделей, где данный метод применяется, являются теория поля синус-Гордон и нелинейная модель Шредингера.

Второй метод основан на представлений Гамильтонианов в качестве центральных элементов соответствующих квантовых аффинных алгебр Ли $U_q(\hat{sl}(2))$, непосредственно в пределе бесконечного объема [8]. Тогда пространство состояний строится с помощью модулей старшего веса соответствующей алгебры $U_q(\hat{sl}(2))$. Путем представлений корреляционных функций и форм факторов в виде q -деформированных вертексных операторов, удается найти интегральные уравнения которым удовлетворяют корреляционные функции. Типичными для настоящего подхода являются шестивершинная модель и ХХZ-модель Гейзенберга со спином 1/2.

Третий подход основывается на детальном анализе структуры собственных векторов Бете в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния и алгебраического анзаца Бете [5]. В этом подходе приходится сталкиваться со сложной комбинаторикой, для обхождения которого вводятся вспомогательные "дуальные" поля. Получающиеся для корреляционных функций и форм факторов детерминантные представления зависят от вакуумных средних "дуальных" полей, которые не могут быть устранены из конечных формул. По этой причине в данном подходе не удается найти явные соотношения для корреляционных функций и форм факторов, хотя можно извлечь характер их поведения на больших расстояниях, посредством разрешения соответствующей задачи Римана-Гильберта.

Таким образом, настоящее состояние проблемы таково что несмотря на отмеченные выше успехи, желательно найти новые методы для вычисления корреляционных функций и форм факторов, дающие явные ответы. В этом свете интересной представляется нестандартный подход Лукянова и Замолодчикова. Указанными авторами в статье [9] была предложена точная формула для вакуумных средних от экспоненциальных полей в модели синус-Гордон, которая позволяет анализировать не только корреляционные функции этой модели, но и сделать предположения об асимптотических поведении некоторых корреляторов в других моделях, эквивалентных синус-Гордону в низкоэнергетических пределах.

Несмотря на множество вышеприведенных примеров а также различие подходов и результатов, важным представляется обобщенный анализ, который мог бы привести к систематическому методу исчерпывающему все случаи. Примером может служить глубокая связь алгебраического анзаца Бете и уравнений Книжника-Замолодчикова, впервые отмеченная в [10] и позволившая впоследствии построить решения этих уравнений исходя из так называемых уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности, явный вид которых был предположен в [11]. Эта связь прослеживается и дальше, так как выясняется что уравнения вытекающие из физическимх соображений (в том числе, из *CPT*-инвариантности) и удовлетворяющиеся форм факторами, являются разностными аналогами уравнений Книжника-Замолодчикова (квантовые уравнения Книжника-Замолодчикова), решения которых задаются интегралами типа Джексона [12].

Целью диссертационной работы является исследование как уже традиционных, так и новых нестандартных методов вычислений корреляционных функций и форм факторов в теории точно решаемых моделей статистической физики и квантовой теории поля а также изучение вопроса о связях различных таких методов, в том числе на примере метода уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности, с целью последующего возможного их обобщения.

Научная новизна.

1. С помощью прямых вычислений доказаны уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности для любых конечномерных представлений всех простых комплексных алгебр Ли, кроме E_8 , F_4 и G_2 . При этом разрешена проблема иерархии в формализме (классического) алгебраического анзаца Бете.
2. Показана явная связь уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности и хорошо известной редуцированной модели сверхпроводника Бардина-Куппера-Шриффера, которая позволяет найти точные собственные функции и собственные значения соответствующего Гамильтониана.
3. Используя явный вид интегральных представлений для решений уравнений Книжника-Замолодчикова полученный с помощью уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности, а также учитывая инвариантность наблюдаемых величин относительно преобразований монодромии, вычислены четырехточечные корреляционные функции $SU(3)$ модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена, анализ сингулярностей которых позволило найти структурные константы алгебры операторов для операторов присоединенного и фундаментальных представлений.
4. Рассмотрены массивная модель Тирринга и эквивалентная теория поля синус-Гордон в евклидовой формулировке. Разработана теория возмущений вокруг свободно-фермионной точки в массивной модели Тирринга, в рамках радиального квантования. С помощью этой теории возмущений вычислены вакуумные средние от экспоненциальных полей в модели синус-Гордон в первом порядке по константе взаимодействия модели Тирринга. Полученные результаты согласуются с точной формулой Лукянова-Замолодчикова и подтверждают эту гипотезу в вышесказанном приближении.
5. Разработан новый метод вычисления форм факторов локальных операторов, при котором выявляется связь между трудно усредняющимися локальными операторами, с помощью чего удается найти уже легко усредняющиеся нелокальные операторы и в конечном счете вычислять форм факторы первоначальных локальных операторов. Метод применен в изотропной ферромагнитной модели Гейзенберга со спином

$1/2$, где вычислены форм факторы локальной плотности энергии.

Практическая ценность работы

Для решения проблемы форм факторов и корреляционных функций, до сих пор полностью не исчерпанной в теории точно решаемых моделей, необходимы исследования уже известных методов и выявления связей между ними. Уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности, доказанные в диссертации почти для всех случаев, может служить связующим звеном между моделями где эта проблема решена полностью и моделями, где неизвестны методы дающие явные выражения для форм факторов и корреляционных функций.

Эквивалентность редуцированной модели БКШ и уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности может быть использован при исследовании так называемых сверхпроводящих атомов. В перспективе возможны также новые подобные обобщения уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности для исследования аналогичных физических систем с более высокой симметрией.

Разработанная теория возмущений, кроме прямых применений, является также интересной тем что работает в условиях явной зависимости Гамильтониана от времени.

Предложенный метод вычисления форм факторов может быть использован для вычислений других аналогичных объектов в теориях допускающих точные решения в рамках алгебраического анзаца Бете.

Научные положения выносимые на защиту.

1. Доказательство уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности для всех простых комплексных алгебр Ли кроме исключительных алгебр Ли E_8 , F_4 и G_2 .
2. Прямая связь уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности с редуцированной моделью БКШ.

3. Вычисления некоторых четырехточечных корреляторов и структурных констант для $SU(3)$ модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена.
4. Разработанная теория возмущений для массивной модели Тирринга в рамках радиального квантования в евклидовой формулировке теории и вычисленные с его помощью вакуумные средние экспоненциальных полей в модели синус-Гордон.
5. Метод вычисления форм факторов и его применение в модели изотропного ферромагнетика Гейзенберга.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях "Duality and Non-Perturbative aspects of QCD", Кембридж 1997, "Selected Topics of Quantum Field Theory and Quantum Statistics", Тбилиси 1999, "New Theoretical Approaches to Strongly Correlated Systems", Кембридж 2000, "Selected Topics of Theoretical and Modern Mathematical Physics", Тбилиси 2000, на республиканской конференции молодых ученых "Физика-99", Ереван 1999, а также на семинарах в Ереванском Физическом Институте.

Публикации.

По теме диссертационной работы опубликовано 5 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения (глава 1), пяти глав, заключения и списка литературы из 93 наименований. Общий объем работы составляет 121 страниц печатного текста.

Содержание Работы

Во введении (глава 1) Обоснована актуальность темы и сделан краткий обзор по проблемам затронутым в диссертации. Изложены практическая ценность и краткое содержание работы.

Во второй главе диссертации рассматриваются уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности и их применения.

В§2.1 показано как Гамильтонианы магнетиков Годена связаны с основополагающими объектами алгебраического Бете анзаца и в рамках этого формализма определены уравнения анзаца Бете вне массовой поверхности.

В§2.2 приведено доказательство уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности для всех простых комплексных алгебр Ли кроме E_8 , F_4 и G_2 , которое опирается на доказанную в виде предложения комбинаторную формулу, в каком то смысле разрешающую проблему иерархий (классического) алгебраического анзаца Бете. Далее доказательство завершается с помощью математической индукции по рангу алгебры Ли, исходя из уже известного случая выполнения этих уравнений для алгебры Ли $sl(2)$ с рангом 1.

В§2.3 обсуждается применение доказанных уравнений для построения интегральных представлений решений уравнений Книжника-Замолодчикова.

В§2.4 приводится пример использования уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности, именно в физической модели сверхпроводника Бардина-Купера-Шриффера. Показано, что с помощью этих уравнений можно диагонализировать редуцированный Гамильтониан Бардина-Купера-Шриффера, налагая уравнения типа Бете на спектральные параметры соответствующих Бетевских векторов.

В третьей главе рассмотрена конформная теория поля Весса-Зумино-Новикова-Виттена с группой симметрии $SU(3)$.

В§3.1 приведены описания модели и метода алгебры токов-генераторов конформных и групповых преобразований, с помощью которого и точно решается настоящая модель теории поля. Подробно рассмотрены возможные представления полупрямого произведения алгебр Вирасоро и Каца-Мууди в секторе бесспиновых операторов поля и разложение

операторной алгебры по представлениям старшего веса этой алгебры.

В§3.2 с помощью приведенных во второй главе явных интегральных представлений решений уравнений Книжника-Замолодчикова, найдены некоторые четырехточечные корреляционные функции, принимая во внимание также свойство инвариантности физическх наблюдаемых (корреляционных функций) относительно преобразований монодромии.

В§3.3 исследованы сингулярности найденных в предыдущем параграфе четырехточечных корреляторов в s - и t -каналах рассеяния, при помощи которых после фиксации относительных нормировок полей найдены все структурные константы алгебры операторов, относящиеся к полям присоединенного и фундаментальных представлений.

В четвертой главе приведен обзор бутстрапного метода вычислений форм факторов вне массовой поверхности, так называемой "форм факторной программы" на примере квантовой теории поля синус-Гордон, следуя материалам статьи [13].

В§4.1 под общим названием условий "максимальной аналитичности" рассматриваются основополагающие аксиомы форм факторной программы, которые следуют из определенных соображений аналитичности в физической области а также из требования инвариантности физической теории относительно SPT -преобразований. Подчеркивается также, что они частично эквивалентны квантовым уравнениям Книжника-Замолодчикова. Приводится теорема, дающая интегральные представления для решений условий "максимальной аналитичности".

В§4.2 представлены решения уравнения Ватсона в модели синус-Гордон, которым удовлетворяют соответствующие двухчастичные форм факторы.

В§4.3 приведенная теорема применяется в модели синус-Гордон для вычисления форм фактора трех (анти) солитонов (фундаментального оператора рождения и уничтожения фермионов массивной модели Тирринга ψ^\pm , который соединяет три (анти) солитоны с вакуумом).

4. интегральных представлений для решений уравнений Книжника-Замолодчикова, полученных из уравнений анзаца Бете вне массовой поверхности, а также учитывая инвариантность корреляционных функций относительно преобразований монодромии. С помощью найденных корреляторов вычислены структурные константы алгебры операторов для присоединенного и фундаментальных представлений.
5. Разработана теория возмущений вокруг свободно-фермионной точки в массивной модели Тирринга, в рамках радиального квантования в евклидовой формулировке. С помощью этой теории возмущений вычислены вакуумные средние экспоненциальных полей в эквивалентной модели синус-Гордон, в первом порядке по константе взаимодействия модели Тирринга. Полученные результаты согласуются с точной формулой предложенной Лукяновым и Замолодчиковом и подтверждают эту гипотезу в данном приближении.
6. Разработан новый метод вычисления форм факторов локальных операторов, в формализме алгебраического Бете анзаца. Метод реализован для изотропного ферромагнетика Гейзенберга со спином $1/2$, где вычислены форм факторы локальной плотности энергии в обкладках Бетевских состояний.

Литература

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov and A.B.Zamolodchikov, "Infinite Conformal Symmetry in Two Dimensional Quantum Field Theory" Nucl. Phys. **B241**, p.333 (1984).
2. А. З. Паташинский и В. Л. Покровский, "Флуктуационная Теория Фазовых Переходов", М. Наука, (1982).
3. V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, "Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two Dimensions", Nucl.phys. **B247**, p.83 (1984).

4. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, "Теория Суперструн", М. Мир, (1990).
5. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov and A. G. Izergin, "Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions", Cambridge University Press, (1993).
6. L. A. Takhtajan, "Introduction to Bethe Ansatz", Lecture Notes in Phys. **242**, Berlin: Springer, (1985).
7. M. Karowski and P. Weisz, "Exact Form Factors in (1+ 1) Dimensional Field Theoretic Models With Soliton Behaviour", Nucl.Phys. **B139**, p.455 (1978).
8. B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, "Diagonalization of the XXZ Hamiltonian by Vertex Operators", Commun.Math.Phys.151, p.89, (1993).
9. S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, "Exact expectation values of local fields in quantum sine-Gordon model", Nucl. Phys. **B493**, p.571 (1997).
10. H. M. Babujian, "Correlation functions in WZNW model as a Bethe wave function for the Gaudin magnets", in: Proc. XXIV Int. Symp. Ahrenshoop, Zeuthen, (1990).
11. H. M. Babujian and R. Flume, "Off-Shell Bethe Ansatz Equation for Gaudin Magnets and Solution of Knizhnik-Zamolodchikov Equations", Mod. Phys. Lett.A9, p.2029 (1994).
12. N. Reshetikhin, "Jackson-Type Integrals, Bethe Vectors and Solution to Difference Analog of the Knizhnik-Zamolodchikov System", Lett. Math. Phys. **26**, p.153, (1992).
13. H.Babujian, A. Fring, M. Karowski and A. Zapletal, "Exact Form Factors in Integrable Quantum Field Theories: the Sine-Gordon Model", Nucl. Phys. **B538** [FS], p.535 (1999).

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. V.V. Mkhitarian, "Gaudine Magnet and Off-Mass-Shell Bethe Wave Functions", Theor. Math. Phys. **113**, p.1217 (1997).
2. V.V. Mkhitarian and R.H.Poghossian, "Structure Constants of $SU(3)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten Theory", Phys. Atom. Nucl. **61**, p.1584 (1998).
3. V.V. Mkhitarian, R.H.Poghossian and T.A.Sedrakyan, "Perturbation Theory in Radial Quantization Approach and the Expectation Values of Exponential Fields in sine-Gordon Model", J. Phys.A; Math.Gen., **33**, p.3335, (2000).
4. В.В. Мхитарян, "О вычислении форм факторов одномерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга", Изв. НАН Арм., т.35, No.5, с. 227, (2000).
5. V.V. Mkhitarian, "Form Factor of the Energy Density Operator in the 1D XXX-Heisenberg Ferromagnet", To be published in J. Math. Phys.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունը նվիրված է ճշգրիտ ինտեգրվող մոդելների, մասնավորապես, կոմֆորմ համաչափությամբ օժտված երկչափ քվանտային դաշտերի $SU(3)$ Վեսս-Չումինո-Նովիտով-Վիտտենի և Բետեյի անզացի եղանակով ճշգրիտ լուծվող սինուս-Գորդոն և Տիրրինգի մասսիվ տեսությունների, ինչպես նաև Հայզենբերգի իզոտրոպ ֆերրոմագնետիկի ուսումնասիրությանը: Հատուկ ուշադրություն է դարձված մասսայի մակերևույթից դուրս Բետեյի անզացի հավասարումներին:

Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքները հետևյալն են.

1. Ուղղակի կոմբինատորիկայի միջոցով, ցանկացած սահմանափակ չափողականությամբ ներկայացումների դեպքում ապացուցվել են մասսայի մակերևույթից դուրս Բետեյի անզացի հավասարումներն բոլոր պարզ կոմպլեքս L -ի հանրահաշիվների համար, բացի E_8 , F_4 և G_2 բացառիկ պարզ հանրահաշիվների: Այդ թվում, լուծվել է (դասական) Բետեյի հանրահաշիվական անզացի հիերարխիաների բարդույթը:
2. Հաստատվել է մասսայի մակերևույթից դուրս Բետեյի անզացի հավասարումների և լայնորեն հայտնի Բարդին-Կուպեր-Շրիֆֆերի գերհաղորդականության մոդելի համարժեքությունը, որը թույլ է տալիս գտնել Համիլտոնիանի սեփական ֆունկցիաներն ու սեփական արժեքները:
3. Օգտվելով վերոհիշյալ Բետեյի անզացի հավասարումներից ստացվող, Կնիժնիկ-Չամոլոդչիկովի հավասարումների լուծումների ինտեգրալ ներկայացումներից, հաշվվել են $SU(3)$ Վեսս-Չումինո-Նովիտով-Վիտտենի տեսության որոշ քառակետ կորրեկտորներ, որանց օգնությամբ հաշվվել են միակցված և ֆունդամենտալ ներկայացումներով ձևափոխվող դաշտերի կառուցվածքային հաստատումները:
4. Տիրրինգի մասսիվ մոդելի ազատ ֆերմիոնային կետի շուրջ մշակվել է խտությունների տեսություն՝ էվկլիդյան ձևակերպման ռադիալ քվանտացման շրջանակներում: Այդ խտությունների տեսության օգնությամբ հաշվվել են համարժեք սինուս-Գորդոն մոդելի էքսպոնենցյալ դաշտերի վակուումային միջինները՝ Տիրրինգի մոդելի փոխազդեցության հաստատունի առաջին կարգով: Ստացված արդյունքները կարող են Լուկյանով-Չամոլոդչիկովի ենթադրած ճշգրիտ բանաձևի ապացույց ծառայել:
5. Լոկալ Ֆորմ ֆակտորների արժեքավորման համար նոր մոտեցում է մշակվել՝ Բետեյի հանրահաշիվական անզացի ֆորմալիզմի շրջանակներում: Մեթոդն օգտագործվել է Հայզենբերգի իզոտրոպ ֆերրոմագնետիկայի մոդելի դեպքում, որի համար ստացվել են էներգիայի լոկալ խտության Ֆորմ ֆակտորները:

B. Mkhitarian